

حل مسئله شماره ۶ (پاییز ۹۷)

فرض کنید به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x + \frac{1}{f(x)}) \geq 2f(x)$ ، دنباله بازگشتی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{f(x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

طبق فرض

$$f(x_n) \geq 2f(x_{n-1}) \geq 2^2 f(x_{n-2}) \geq \dots \geq 2^n f(x_1) = 2^n f(0). \quad (1)$$

رابطه (۱) نشان می دهد که دنباله $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای بی کران است. از طرفی

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{f(x_{n-1})} \leq x_{n-1} + \frac{1}{2^{(n-1)} f(x_1)}.$$

در نتیجه

$$x_n \leq \frac{1}{2^{(n-1)} f(x_1)} + \frac{1}{2^{(n-2)} f(x_1)} + \dots + \frac{1}{2 f(x_1)} + \frac{1}{2^0 f(x_1)} + x_1 \leq \frac{2}{f(0)}.$$

چون تابعی صعودی است، $f(x_n) \leq f(\frac{2}{f(0)})$ ، که این با کراندار نبودن دنباله $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ تناقض دارد.