

حل مسئله شماره ۳ (پاییز ۹۷)

معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x) \quad (۱)$$

اگر در ۱ قرار دهیم $y = -f(x)$ ، آنگاه داریم:

$$f(f(f(-x) - x)) = f(0) - 2x.$$

این رابطه نشان می دهد که f تابعی پوشاست. لذا $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = 0$. با جاگذاری $x = x_0$ در رابطه ۱ نتیجه می شود که

$$f(y) - x_0 = x_0 + f(f(y) - x_0).$$

اگر x یک عدد حقیقی باشد، $y \in \mathbb{R}$ را چنان انتخاب می کنیم که $f(y) - x_0 = x$.
و در نتیجه

$$f(x) = x - x_0.$$

اسامی افرادی که به این سوال پاسخ درست داده اند: مهناز حامدی.