

حل مسئله شماره ۲ (پاییز ۹۷)

راه حل اول. فرض کنید r یک عدد صحیح مثبت باشد. قرار می دهیم :

$$a_n = r^{n-1}a_1, \quad n = 2, \dots$$

در نتیجه

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})a_1 = \frac{r^n - 1}{r - 1}a_1,$$

$$t_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = (1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2(n-1)})a_1^2 = \frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1}a_1^2.$$

پس

$$\frac{t_n}{s_n} = \frac{\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}a_1^2}{\frac{r^n-1}{r-1}a_1} = \frac{r^n + 1}{r + 1}a_1$$

اگر $r = 3$ ، $a_1 = 2$ در نظر میگیریم.
اگر $a_1 > 2$ ، $r = a_1 - 1$ در نظر میگیریم. در هر دو حالت t_n بر s_n بخش پذیر است و دنباله a_n یک دنباله صعودی است.
راه حل دوم. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ در شرایط مسئله صدق کنند. ثابت می کنیم a_{n+1} می توانیم چنان بیابیم که

$$A_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2,$$

بر

$$B_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

بخش پذیر باشد. قرار می دهیم :

$$a_{n+1} = A_n + B_n^2 - B_n.$$

داریم:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + B_n^2 + (a_{n+1} - B_n)(a_{n+1} + B_n) \\ &= a_{n+1} + B_n + (a_{n+1} - B_n)B_{n+1} \\ &= B_{n+1} + (a_{n+1} - B_n)B_{n+1} \\ &= (a_{n+1} - B_n + 1)B_{n+1} \end{aligned}$$

پس A_n بر B_n بخش پذیر است. واضح است که دنباله a_n یک دنباله صعودی است.

اسامی افرادی که به این سوال پاسخ درست داده اند: مهناز حامدی. راه حل دوم از مهناز حامدی است.