

حل مسئله شماره ۱ (پاییز ۹۷)

برای حل این مسئله از مطالب زیر استفاده میکنیم:

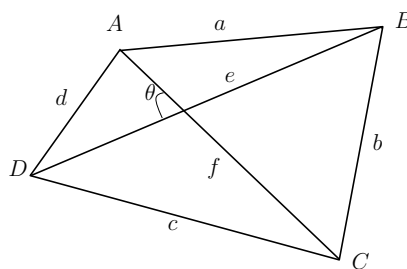
- به ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی s, t داریم:

$$\sqrt{st} \leq \frac{s+t}{2}. \quad (\text{نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی})$$

- مساحت هر مثلث برابر است با حاصل ضرب دو ضلع در نصف سینوس زاویه بین دو ضلع.

- در هر چهار ضلعی مساحت برابر است با حاصل ضرب دو قطر در نصف سینوس زاویه بین دو قطر.

چهار ضلعی محدب $ABCD$ (شکل زیر) را در نظر بگیرید،



داریم:

$$\sqrt{ab + ad + cb + cd} = \sqrt{(a+c)(b+d)} \leq \frac{a+c+b+d}{2}. \quad (1)$$

$$1 = S_{ABCD} = \frac{1}{2}ef \sin(\theta) \Rightarrow ef \geq 2 \Rightarrow e+f \geq 2\sqrt{2}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 1 &= S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \\ &= \frac{1}{2}ab \sin(\hat{B}) + \frac{1}{2}cd \sin(\hat{D}) \\ &\leq \frac{ab + cd}{2}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$ab + cd \geq 2 \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} 1 &= S_{ABCD} = S_{BAD} + S_{BCD} \\ &= \frac{1}{2}ad \sin(\hat{A}) + \frac{1}{2}bc \sin(\hat{C}) \\ &\leq \frac{ad + bc}{2}. \end{aligned}$$

پس

$$ad + bc \geq 2. \quad (۴)$$

از روابط ۱، ۲، ۳ و ۴ داریم:

$$(a+c+b+d)+(e+f) \geq 2\sqrt{ab+ad+cb+cd}+2\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2+2}+2\sqrt{2} = 4+2\sqrt{2}.$$

اسامی افرادی که به این سوال پاسخ درست داده اند: سولماز فرخ و مبینا کهنسال. راه حل فوق از سولماز فرخ است.