

فرض کنید

$$P(x, y) = (x, y)^n - x^n - y^n = \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j.$$

(۱) اگر $n = p^k$ ، آنگاه تمام ضرایب $P(x, y)$ بر p بخش پذیر است.
اگر $1 \leq j \leq p^k - 1$ ، آنگاه

$$\binom{p^k}{j} = \frac{p^k}{j} \binom{p^k - 1}{j - 1}.$$

اگر $j = rp^m$ و $(r, p) = 1$ ، آنگاه $\frac{p}{j} = \frac{p^{n-m}}{r}$ و $m - n \geq 1$. بنابراین $\binom{p^k}{j}$ بر p بخش پذیر است.

(۲) اگر n توانی از p نباشد، آنگاه حداقل یکی از ضرایب $\binom{p^k}{j}$ بر p بخش پذیر نیست.
فرض کنید $p^k < n < p^{k+1}$. پس $0 < c = n - p^k < p^k(p - 1)$ و در نتیجه

$$\binom{n}{c} = \binom{p^k + c}{c} = \prod_{k=1}^c \frac{p^k + j}{j}.$$

اگر $j = rp^b$ که $(r, p) = 1$ ، آنگاه $\frac{p^{k+j}}{j} = \frac{p^{k-b+r}}{r}$ و در نتیجه ضریب $\binom{n}{c}$ حاصلضربی از اعدادی صحیح است که هیچ کدام از این اعداد بر p بخش پذیر نیستند.

اسامی افرادی که پاسخ درست داده اند:

کمیا باوفا.