

چون تابع $\ln x$ صعودی است داریم

$$\begin{aligned} \int_3^{2n+1} \ln x \, dx &= \int_3^5 \ln x \, dx + \int_5^7 \ln x \, dx + \int_7^9 \ln x \, dx + \cdots + \int_{2n-1}^{2n+1} \ln x \, dx \\ &\geq \int_3^5 \ln 3 \, dx + \int_5^7 \ln 5 \, dx + \int_7^9 \ln 7 \, dx + \cdots + \int_{2n-1}^{2n+1} \ln(2n-1) \, dx \\ &= 2(\ln 3 + \ln 5 + \cdots + \ln(2n-1)). \end{aligned}$$

از طرفی

$$\int_3^{2n+1} \ln x \, dx = x \ln x - x \Big|_3^{2n+1} = (2n+1) \ln(2n+1) - (2n+1) - 3 \ln 3 + 3.$$

بنابراین

$$\ln(3.5.7.\dots(2n-1)) \leq \ln \left(\frac{2n+1}{e} \right)^{\frac{2n+1}{2}} - 3 \ln 3 + 3 \leq \ln \left(\frac{2n+1}{e} \right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

در نتیجه

$$3.5.7.\dots(2n-1) \leq \left(\frac{2n+1}{e} \right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

طرف دیگر نامساوی به طور مشابه با استفاده از انتگرال تابع $\ln(x-2)$ روی بازه $[3, (2n+1)]$ بدست می آید.

اسامی افرادی که پاسخ درست داده اند:

کیمیا با وفا.