

کارگاه ۴ روزه

وقت امتحان شده!!!

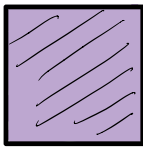


مقدمه ای بر پایای LS-cat

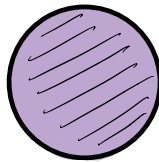
موضوع: Homeomorphic Spaces v.s. Homotopy Equivalent Spaces

در هر سوال، دو فضای توپولوژیکی داده شده را با هم مقایسه کنید و تصمیم بگیرید که کدام یک از سه گزینه درست می باشد.

سوال ۱:



&

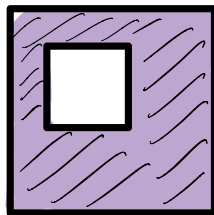


هر دو مورد زیر فضای بسته در $\mathbb{R}^2$ هستند

در نتیجه با هم homeomorphic و homotopy equivalent هستند

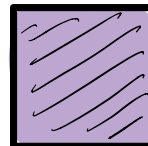
سوال ۲:

M



&

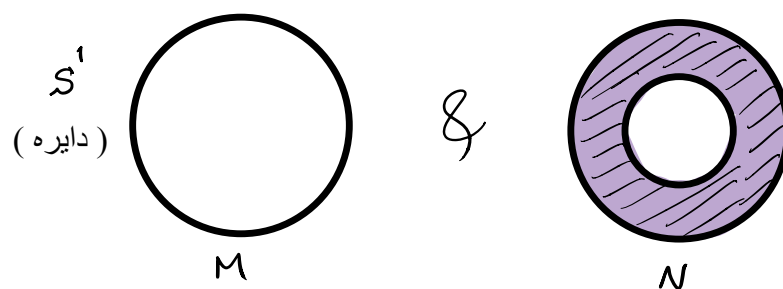
N



فضای N یک فضای انقباض پذیر است در حالی که فضای M با دایره homotopy equivalent می باشد

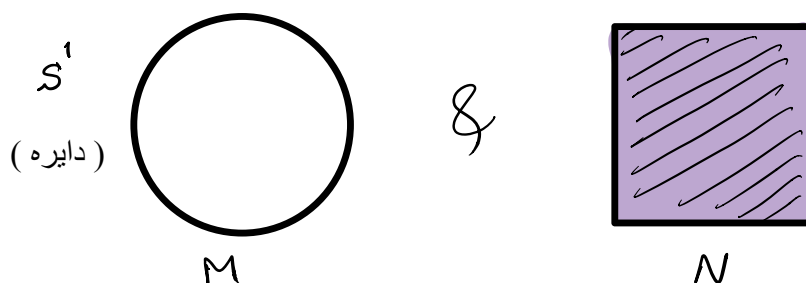
در نتیجه نه homeomorphic هستند و نه homotopy equivalent

سوال ۳:



فضاهای M و N با هم homotopy equivalent هستند ولی homeomorphic نیستند. به دلیل اینکه N یک فضای دوبعدی است ولی M یک فضای یک بعدی است. $\dim(M) = 1$ و $\dim(N) = 2$

سوال ۴:



فضای N یک فضای انقباض پذیر است ولی فضای M انقباض پذیر نیست در نتیجه فضاهای M و N نه homeomorphic هستند و نه homotopy equivalent

سوال ۵:

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$

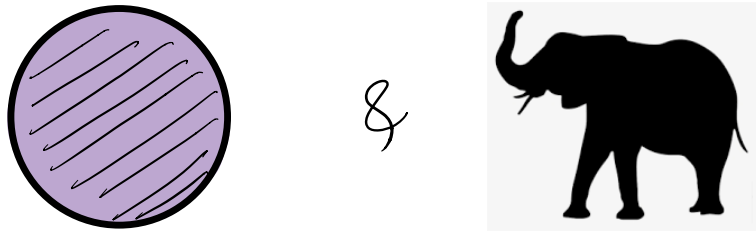
هر دو فضا انقباض پذیر هستند و در نتیجه با هم homotopy equivalent هستند ولی homeomorphic نیستند به دلیل اختلاف در بعد. $\dim(\mathbb{R}) = 1$ و $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

سوال ۶:

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$

هر دو فضا انقباض پذیر هستند و در نتیجه با هم homotopy equivalent هستند ولی homeomorphic نیستند به دلیل اختلاف در بعد. $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ و $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

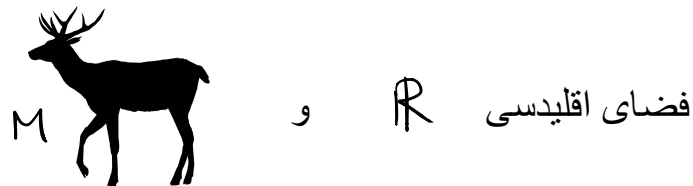
سوال ۷:



هر دو مورد زیر فضای بسته در $\mathbb{R}^2$ هستند

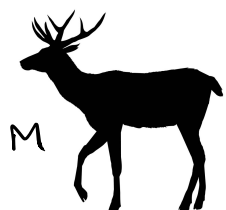
در نتیجه با هم homeomorphic و homotopy equivalent هستند

سوال ۸:



هر دو فضا انقباض پذیر هستند و در نتیجه با هم homotopy equivalent هستند ولی homeomorphic نیستند به دلیل اختلاف در بعد. $\dim(M) = 2$ و $\dim(\mathbb{R}) = 1$

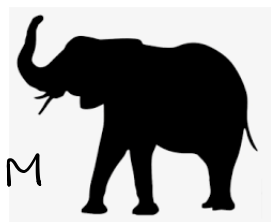
سوال ۹:



و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$

هر دو فضا انقباض پذیر هستند و در نتیجه با هم homotopy equivalent هستند ولی homeomorphic نیستند به دلیل اینکه M یک زیرفضای بسته و کران دار در $\mathbb{R}^2$ است و در نتیجه یک فضای (فشرده) compact است، در حالی که $\mathbb{R}^2$ فشرده نیست.

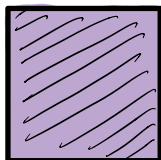
سوال ۱۰:



و $\{0\}$ = یک نقطه

فضای M انقباض پذیر است و در نتیجه دو فضا با هم homotopy equivalent هستند ولی homeomorphic نیستند به دلیل اختلاف در بعد.

سوال ۱۱:

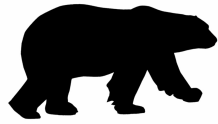


&

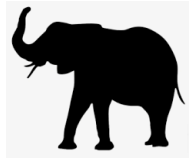


هر دو مورد زیرفضای بسته در $\mathbb{R}^2$ هستند

در نتیجه با هم homeomorphic و homotopy equivalent هستند



&



سوال ۱۲:

هر دو مورد زیر فضای بسته در $\mathbb{R}^2$ هستند

در نتیجه با هم homeomorphic و homotopy equivalent هستند



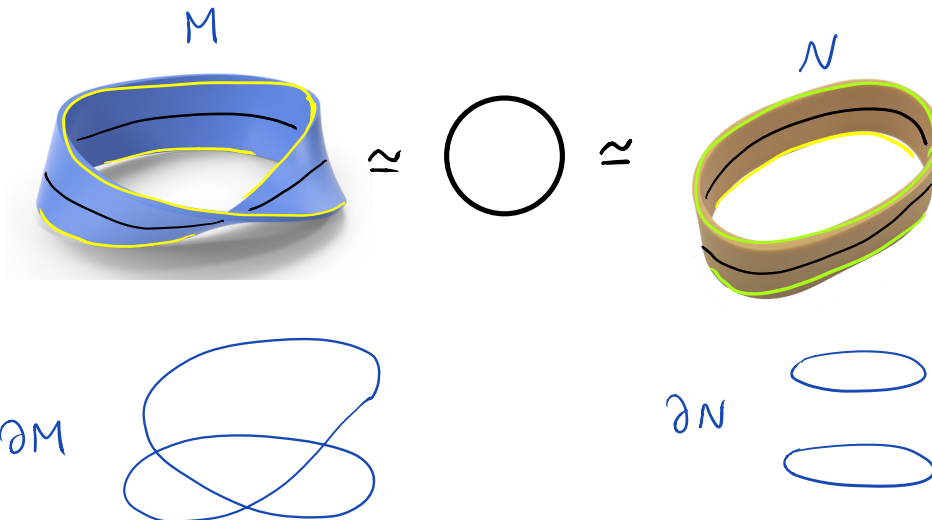
&



سوال ۱۳:

هر دو مورد زیر فضای بسته در $\mathbb{R}^2$ هستند

در نتیجه با هم homeomorphic و homotopy equivalent هستند



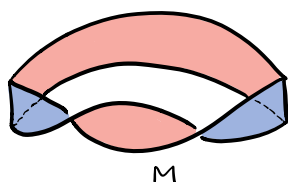
سوال ۱۴:

نوار موبیوس و استوانه را میتوان به دایره مرکزی خودشان منقبض کرد.

پس هر دو فضا با دایره homotopy equivalent هستند و در نتیجه با هم homotopy equivalent می باشند

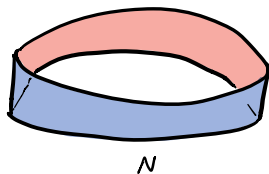
ولی homeomorphic نیستند زیرا (مرز) boundary نوار موبیوس یک دایره است و در نتیجه همبند است در حالی که boundary استوانه دو دایره از هم جدا هستند و در نتیجه (غیر همبند) disconnected است

چند نکته:



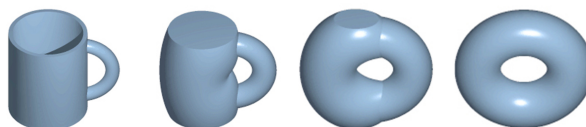
در شکل مقابل، فضاها M و N دوفضای homeomorphic هستند

اگرچه نمی توان بین M و N یک continuous deformation تعریف کرد



دونات و لیوان دسته دار دو فضای homeomorphic هستند که

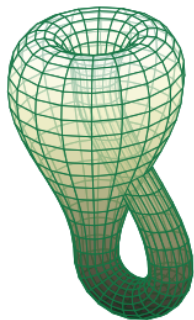
میتوان یک continuous deformation از یکی به دیگری تعریف کرد.



بطری کلاین که از چسباندن مرزهای دو نوار موبیوس به هم به دست میاید با لیوان دسته دار و یا دونات

نه تنها homeomorphic نیستند، بلکه homotopy equivalent هم نیستند.

به دلیل تفاوت در اولین گروه همولوژی.



$$H_1(\text{Klein}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \quad H_1(\text{Torus}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

همچنین این دو فضا دارای fundamental group های متفاوتی هستند.

توجه داشته باشید که اگر دو فضای توپولوژیکی homotopy equivalent باشند، همه گروههای

همولوژی و هموتوپی این دو فضا (ایزومورفیک) isomorphic هستند.